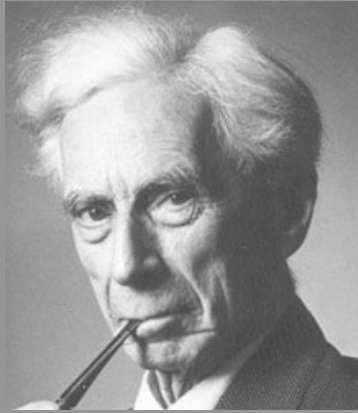


僅提供學術教學使用

數學的研究

MATHEMATICS

THE STUDY OF



小品

文本

科學
的本質

問題

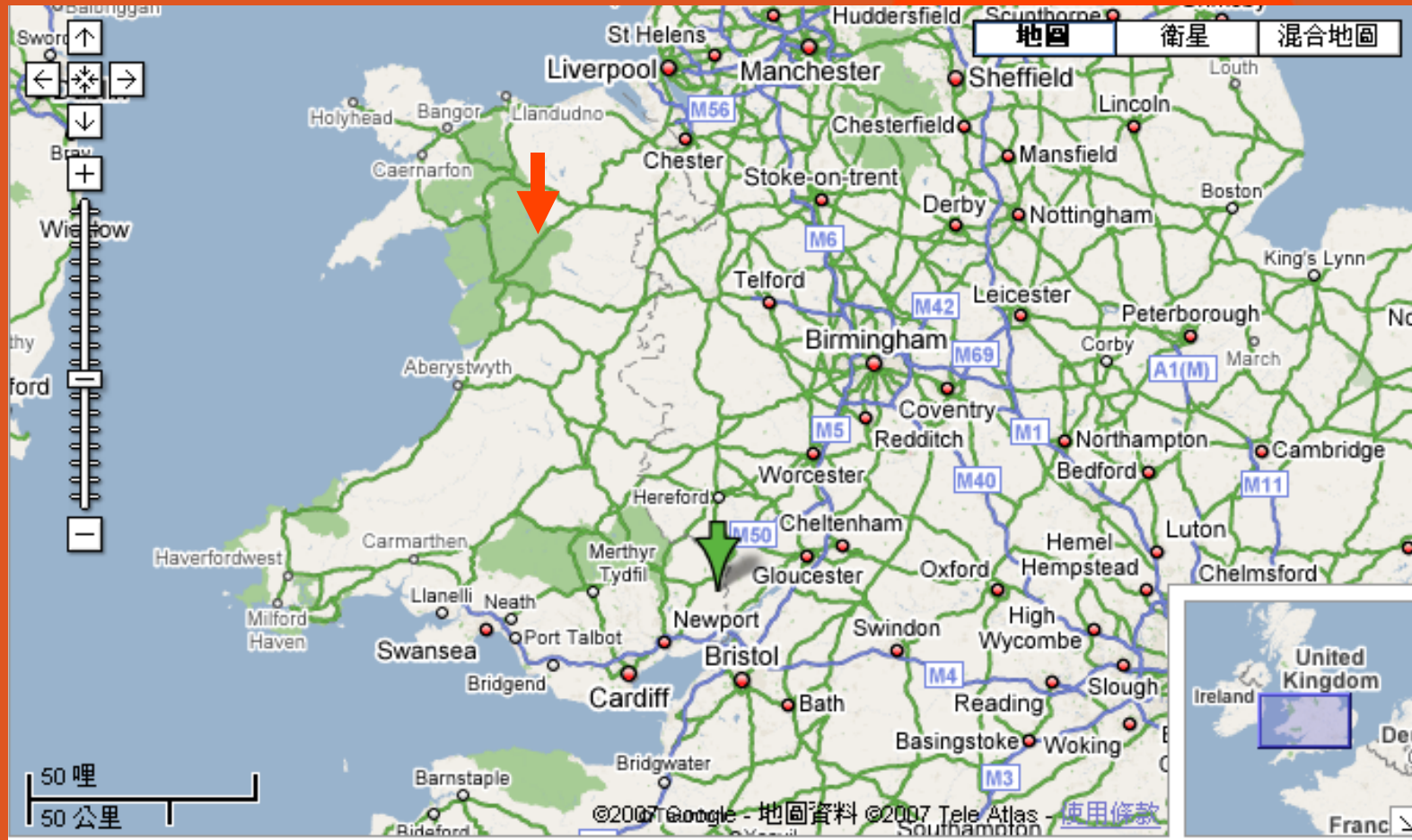
神秘主義與邏輯

Mysticism and Logic, and other Essays, 1918



僅提供學術教學使用

羅素 (Bertrand Russell, 1872-1970)



31.1 動機

- 什麼是它的目的與理想？對於人類存在的美，它以什麼方式作出貢獻？
- 值得很好地提醒一聲，對於那些只會在遙遠的將來，通過提供生活途徑的辦法作出貢獻的研究和追求，我們所寄予的希望，並非僅僅是生活的改善，而且還有思考偉大事物時生活態度的昇華。

31.2 現況（抽象）

- 偉人們把畢生奉獻給深知其魅力的沉思，希望與別人分享其喜悅，讓人類相信要把那些缺少了就不可能跨過文明門檻的機械（定型了的）知識世世代代傳遞下去。
- 但是灌輸這種知識的特權是由枯燥乏味的腐儒們掌握的，他們忘記了這只是用來打開殿堂大門的鑰匙；雖然他們的一生都花費在通向那些神秘大門的台階之間，他們卻是執地用背對著那座殿堂，完全忘卻了它的存在，至於那些有可能催逼向前，以引荐給殿堂美輪美奐的拱門的熱切少年，卻被命令所迫，轉過身去數台階。

31(32).3 現況（具體）

- 對於數學的目的究竟是什麼的詢問，回答往往是它為機器的製造，各地間的旅行，在軍事或商戰中勝過敵國，提供了方便。
- 可算正確的答覆是：數學訓練了思維能力。
- 而思維能力本身，對於那些鼓吹其開發的人說來，一般都設想為不過是避免掉進陷阱的工具，有助於發現實際生活中的指導規則而已。
- 柏拉圖把數學真理的思考看成連神也值得這樣做的事，
- 克利尼阿斯。那麼，異鄉人，在必需的知識中什麼是屬於上天而非人類的？
- 雅典人。那是指這樣的東西，一個人不利用它或不具備關於它的知識，他對世界就不是主宰，不是精靈，成不了英雄，而且也不能真誠地為人設想和關心人。

32.2 數學之美（羅素的夢囈）

對極大多數人說來，現實生活是一個漫長的不得已而求其次的經歷，是理想與可能之間永恆的妥協；然而在純粹理性的世界裡，對於體現在輝煌大廈中的創造活動，對於所有偉大業績從中湧現的追求完善的激情，卻不知道什麼妥協，不承認實際的局限，也不存在障礙。一代又一代的人，不顧人類的好惡，甚至也不考慮自然中不值一顧的事實，已經逐漸創造出一個有序的天地宇宙，純粹的思維在那裡可以像在自然的家裡那樣安居，而在我們的高貴動機中，至少有了一個場所，可擺脫現實生活的令人志氣消沉的折磨。

32.3 數學可見之美

- 數學的超群脫俗的特徵，只能在嚴格邏輯的推理中找到：邏輯規則之對於數學，就像結構對建築那樣重要。
- 最美的著作，呈現出一條論證的鏈，其中的每個環節都有必不可少的重要性，其中從頭到尾存在著一種寧靜與清澈的氛圍，而且通過看來是自然而不可避免的工具，由前提條件推導出了比可能想像到的更多的結論。

33.1 數學教學的主要目的、幾何學教學現況與教學指導原則

- 喚醒學習者對推理的信念，樹立起被論證了的真理的信心，並認識到論證的價值。
- 目前，在講授算術時，給予孩子們的是是一組規則，它們本身看來無所謂對與錯，而只像是教師意志的體現，在孩子們看來，這是教師為了某種深奧莫測的理由，要大家照此玩遊戲的方式。
- 沉悶的 無聊的證明方法去處理 明顯的自明之理，
- 應該教他們去論證 定理，它們開始時讓人驚訝，卻又易於用實際的作圖來驗證。信心就這樣地產生：它使用人認識到推理可以得到雖然令人驚逐，然而可用事實來驗證的結論；這樣就可以信任。逐步克服對抽象和理性的道理的本能的不可信任感。遇到含有難點的定理，應該先當作幾何作圖的練習來教，直到圖形已變得完全熟悉為止；在此基礎上再講授與此有關的各種直線與圓的邏輯關聯，才會是一種學生同意的進步。

33.2 數學教學的主要目的、代數教學現況與教學指導原則

- 我們在代數學中才第一次教育他們去考慮一般的真理，一種並不僅僅對這個或那個具體的事物成立，而是對一整批事物中的任一個都成立的道理。
- 正是靠理解和發現這類真理的能力，智者才握有對世界上實際與可能事物的優勢；而處理這種普遍性的能力，也正是數學教育應該饋贈的一種禮物。

33(34).3 邏輯的純潔性

- 無窮概念
- 埃利亞的芝諾提出來的不能回答的問題。
- 一直有一條當作自明道理的假設：假如從事物的任何一個集合中取走了一些事物，剩下的事物數總要比原來的事物數少。
- 事實上，這個假設僅對有限的集合才成立；
- 一直必須用冗長的詭辯過程，學著去同意那種初一接觸就可正確地判斷為混亂和錯誤的議論。
- 一種祭司式的神秘信仰，對於不皈依者根本無法理解。

34.2 數學的本質

- 數學推理的純潔性與嚴密性。
- 在未經訓練的頭腦看來似乎是自明的許多命題，在詳加考慮之下會證明是錯誤的。
- 推理長鏈中，整個數學研究的統一性才會顯露出來。

35.1 數學的本質

- 統一性和必然性都像戲劇的展開那樣可以感覺得到。在前提中，提出了要加以考慮的課題，而在以後的每一步中都在掌握其性質方面有肯定的進展。對系統和對內在聯繫的深情鍾愛，這也許是智能性衝動的最內在的本質，再沒有別的地方能像在數學中那樣得到自由的顯露。
- 感受到這種衝動的學習者，實在不應該被大量無意義的例題所干擾，也不能因逗弄人的古怪東西而分心，相反，必須鼓勵他們去仔細思考中心的原理，去熟悉放在他面前的各種學科中的結構，去一步步熟練地跨越更重要推演中的步驟。以這樣的方式，可培養出良好的精神狀態，也教會了他們根據對重要和本質事物的愛好進行有選擇的專注。

35.2 數學的理性美

- 當每一個將數學劃分開的獨立研究，都被看成是一邏輯的整體，看成是從一些構成了它們原理的命題自然成長的結果時，學習者就將能夠理解一門基本的學科——那個將整個演繹推理統一起來並予以系統化的學科。這就是符號邏輯——
- 發現到所有的數學全都是一小組基本定律的必然結果，無可估量地加強了整體的理性美

35.3 數學與哲學

- 在符號邏輯取得它目前的發展之前，數學賴以建立的原理一直被假定為哲學的，而且只能夠借助於迄今為止由哲學家所運用的、不肯定而且非逐步推演的方法來發現。
- 發現到數學的真實原理也像它的任何結果一樣，都是數學的一部分，就是極大地增加了人們所追求的理性上的滿足。能夠領略和享受的學習者不應該拒絕這種滿足感，因為這也增加了對人類能力的敬重以及對屬於抽象世界之美的知識的敬重。

35(36).4 哲學之外的數學（可解釋為何柏拉圖的想法）

- 哲學家通常一直認為，成為數學之基礎的邏輯定律，是思維的定律，是規範我們頭腦之操作的定律。
- 理性是對一切實際和可能事物之核心以及永不更易之本質的一種探究，相反，倒變成了對不多不少屬於人類的某種東西的一種探索，而且還受到人類之局限性的約束。
- 數學則更進一步，把我們從人事範圍帶進了絕對必然性的領域，帶向不僅是現實世界，而且每一種可能的世界都必須遵循的規律；並且就在此處，它建造了或者說發現了一個永恆存在的居所，在那裡我們的理想得到充分的滿足，而我們最好的願望也絕不會受到挫傷。只有到那個時候，我們才徹底地理解了我們的完整的獨立性，這種獨立性屬於理性所發現的那個世界；也只有到那個時候，我們才徹底理解並能夠認識到那個世界之美的深刻重要性。

36.2 理性世界與時空之中的世界

- 如果我們想要正確地理解數學在藝術中間的位置，對這種純理想性格的理解就是必不可少的。
- 將理性世界的結果應用於時空之中的世界時，它的肯定性與準確性就失落在近似與假設之中。
- 一方面理性不能支配世界上的事實，另一方面，事實也不能限制理性的特權，它根據對美的鍾愛，去處理似乎值得研究的對象。

36(37).3 論證之美

- 在教育工作中，不僅讓學生相信重要定理的準確性，而且讓他珍視在定理可能採取的一切可能方式中，這個方式本身所擁有的最高的美，是十分符合需要的。不能像傳統的講授方法讓人想到的那樣，對於論證的真正興趣，不應全部集中於其結論；如果發生了這種情況，那應該看成是一種失敗，需要加以治療。
- 不恰當地強調結論的現象，應由急於征服新領域，想快點進步的急功近利的精神和願望負責
- 在一個議論中運用了超出作結論所必需的前提，就要認為是一次失敗：數學稱之為優雅的，是那些在證實論題為真的時只運用了最本質前提的論述。
- 歐幾里得的功績是在他運用平行公理之前，已前進到了他能達到的最遠點——他之所以盡量不運用這條公理，並不是像人們通常說的，是因為這條公理有內在要不得的東西，而是因為，在數學中每增添一條新的公理，就會縮減由此得出的定理的普遍性，而最大可能的普遍性才是要追求的高於一切的東西。

37.2 數學是真理大廈

- 懷疑論，數學是一劑永恆的譴責，因為它的真理大廈不可動搖地屹立在那裡，是一切玩世不恭的犬儒武器所無法攻破的。

37.3 數學的貢獻

- 數學對實際生活產生的效果，雖然不應該看成是我們研究的動機，卻可以用來回答獨居寂寞的學生一定常常會有的疑問。
- 在這樣的問題面前，真實的答案是：毫無疑問總得要有某些人去保持聖火不滅，在每個世代中都必须要有某些人去保存那些能預示驚心動魄的目標遙遙在望的、使人夢縈魂繞的遠見。
- 世界從抽象思維的結果中，擁有了一筆資本，而迄今為止尚未發現運用這一資本去為普通人造福，存在著什麼極限。經驗還不能提供任何工具，無法決定數學的哪一部分才是有用的。所以功利只能在感到失望的時刻給人以寬慰，卻不能指引我們的研究方向。

38.2 數學的教與學

- 對真理的鍾愛是對虧蝕中信心的主要的鼓勵，而在數學中，對真理的鍾愛要比其他地方更易找到。每個偉大的研究不僅本身就是目的，而且也是創造和堅持高貴的精神習慣的工具；而這樣的目的應該始終在數學的教與學中牢牢記住。

科學的本質

「深夜小狗神秘習題」有三個人同在一列火車上，一個是經濟學家，一個是邏輯學家，另外一個是數學家。火車剛剛越過蘇格蘭邊境（我不知道他們為什麼要去蘇格蘭），三人從車窗望出去，看見田園中有一頭棕色的乳牛（乳牛站立的方向與火車平行）。

經濟學家說："看，蘇格蘭的乳牛是棕色的。"

邏輯學家說："不，蘇格蘭有乳牛，其中至少有一頭是棕色的。"

數學家說："不，蘇格蘭至少有一頭乳牛有一邊是棕色的。"

這個笑話很有意思，因為經濟學家不是真正的科學家，邏輯學家的思慮比較清晰，但數學家說得最好。

科學的本質

- 理性客觀

- 但是數學則更進一步，把我們從人事範圍帶進了絕對必然性的領域，帶向不僅是現實世界，而且每一種可能的世界都必須遵循的規律；並且就在此處，它建造了或者說發現了一個永恆存在的居所，在那裡我們的理想得到充分的滿足，而我們最好的願望也絕不會受到挫傷。只有到那個時候，我們才徹底地理解了我們的完整的獨立性，這種獨立性屬於理性所發現的那個世界；也只有到那個時候，我們才徹底理解並能夠認識到那個世界之美的深刻重要性。

科學的本質

- 可證偽

- 在未經訓練的頭腦看來似乎是自明的許多命題，在詳加考慮之下會證明是錯誤的。

科學的本質

- 普遍必然性

- 在一個議論中運用了超出作結論所必需的前提，就要認為是一次失敗：數學稱之為優雅的，是那些在證實論題為真的時只運用了最本質前提的論述。歐幾里得的功績是在他運用平行公理之前，已前進到了他能達到的最遠點——他之所以盡量不運用這條公理，並不是像人們通常說的，是因為這條公理有內在要不得的東西，而是因為，在數學中每增添一條新的公理，就會縮減由此得出的定理的普遍性，而最大的普遍性才是要追求的高於一切的東西。

科學的本質

- 存在一個適用範圍
 - 假如從事物的任何一個集合中取走了一些事物，剩下的事物數總要比原來的事物數少。事實上，這個假設僅對有限的集合才成立；而且，在涉及無限時，已經表明，否定這一假設，

科學的本質

《吕氏春秋》

楚王在雲夢澤打獵，不小心把自己心愛的弓丟失了。左右的侍從立刻要去尋找。楚王制止道：“楚人失之，楚人得之。不必找了。”孔子聽說此事後評論說：“為什麼要把‘楚人’與‘人’區別開來呢？不妨說：‘人失之，人得之。’這樣符合仁義了！”老子聽說了孔子的評論後說道：“為什麼要把‘人’與‘天地’區別開來呢？不妨說：‘失之，得之。’這樣就符合天道了！”

Q1:

回顧我們所接受的數學訓練過程，
是否如羅素文中所描述的普遍現象？
是否認為羅素文中所建議的
數學教育理念與落實方法會更能
達到數學教育的目的？



Q2:

你擁有了數學教育餽贈的禮物嗎？
如思維能力？如擁有避免掉入陷阱
的工具，有助於發現實際生活中的
指導規則？如體認論證價值？如握
有對世界上實際與可能事物的優勢
，也就是處理某類普遍性的能力？

